科氏效应对叶片-桨毂-轴耦合系统振动特性的影响规律研究

周子宣[1,2],黄修长[1,2],华宏星[1,2]

(1. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室,200240 上海;
2. 上海交通大学振动冲击噪声研究所,200240 上海)

摘　要:采用几何精确模型与阶次截断方法描述叶片的空间变形,建立了考虑科氏效应与离心刚化作用的叶片-桨毂-轴耦合系统动力学模型,推导了耦合系统振动微分方程。采用 Rayleigh-Ritz 法进行数值离散,计算了不同刚度比、半径比、转速和叶片数下,科氏效应对系统模态频率的影响。研究表明:叶片-桨毂-轴耦合系统模态中包含耦合和非耦合两类模态,耦合模态频率在考虑科氏效应后发生明显降低;随着半径比增加,科氏效应对第 1 阶耦合模态频率的影响逐渐减弱,对第 2 阶耦合模态频率的影响逐渐增强;转速的增加会提升耦合模态对科氏效应的敏感性;刚度比处于 $10^3 \sim 10^5$ 范围内时发生叶片模态振型转换的现象,模态振型转换后科氏效应的影响更为显著;随着叶片数目的增加,科氏效应对模态频率的影响逐渐减弱。研究结果可为旋转叶片-桨毂-轴耦合系统的动力学设计提供理论参考。

关键词:叶片-桨毂-轴耦合系统;固有频率;几何精确;科氏效应;Rayleigh-Ritz 法
中图分类号:TK05　　**文献标志码:**A

Coriolis effect on vibration characteristics of blade-hub-shaft coupling system

ZHOU Zixuan[1,2], HUANG Xiuchang[1,2], HUA Hongxing[1,2]

(1. State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, 200240 Shanghai, China;
2. Institute of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiao Tong University, 200240 Shanghai, China)

Abstract: Geometry exact model and order reservation approach were adopted to describe the spatial deformation of the blade, the dynamic model of the blade-hub-shaft coupling system considering the Coriolis effect and the centrifugal stiffening effect was established, and the vibration differential equation of the coupling system was derived. The Rayleigh-Ritz method was used for numerical dispersion, and the influence of the Coriolis effect on the system modal frequency was calculated under different stiffness ratios, radius ratios, rotation speeds and blade numbers. The research shows that the modes of blade-hub-shaft coupling system consist of two types of coupled and uncoupled modes. The frequency of the coupled mode is significantly reduced after considering the Coriolis effect. As the radius ratio increases, the influence of the

收稿日期:2020-09-15　　**修回日期:**2022-04-17
通信作者:华宏星,教授。E-mail:hhx@ sjtu. edu. cn
引用格式:周子宣,黄修长,华宏星. 科氏效应对叶片-桨毂-轴耦合系统振动特性的影响规律研究[J]. 应用力学学报,2022,39(3):527-535.
ZHOU Zixuan, HUANG Xiuchang, HUA Hongxing. Coriolis effect on vibration characteristics of blade-hub-shaft coupling system[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(3):527-535.

Coriolis effect on the first order coupled modal frequency is gradually weakened, and the influence on the second-order coupled modal frequency is gradually strengthened; the raise of the rotational speed will improve the sensitivity of the coupled modal to the Coriolis effect; the blade modes shape conversion phenomenon occurs when the stiffness ratio is within the range of 10^3-10^5, the effect of the Coriolis effect becomes more significant after the mode shape conversion. As the number of blades increases, the influence of the Coriolis effect on the modal frequency gradually decreases. The research results provide theoretical reference for the dynamic design of the rotating blade-hub-shaft coupling system.

Key words: blade-hub-shaft coupling system; natural frequency; geometry exact; Coriolis effect; Rayleigh-Ritz method

旋转叶片-桨毂-轴结构常见于各种动力与推进设备,叶片在旋转时工况复杂,其振动特性一直备受关注。国内外研究者对旋转叶片结构进行了大量研究[1-2]。

刚柔耦合模型是一种应用较为广泛的旋转梁动力学特性分析模型。杨辉等[3]从刚柔耦合角度针对旋转柔性梁-刚性转轴系统进行研究,利用一次近似模型对旋转梁的动力学响应并进行了仿真计算及实验验证,表明旋转梁需考虑离心刚化作用。吴胜宝等[4]在计算旋转梁动力学特性时在纵向变形位移中计及了横向弯曲引起的轴向缩短,表明柔性梁中既可存在动力刚化效应,也可存在动力柔化效应。郭小炜等[5]采用哈密尔顿原理建立了含偶应力弹性体作定轴刚体转动的运动与变形耦合动力学模型,针对不同的角速度变化规律,讨论了旋转悬臂方梁的非线性动力学响应特征。盛国刚等[6]建立了支承运动情况下旋转梁的刚-柔耦合振动非线性动力学模型,分析了刚性角位移与梁的动力学响应之间的关系。An 等[7]分析了变刚度的旋转梁瞬态动力学响应问题。文献[8-9]利用梁中心线的倾斜角和拉伸应变来描述欧拉伯努利梁的变形,分析了具有恒定角速度情况下的固有频率及振型,表明在考虑弯曲和拉伸耦合效应时,会出现频率曲线转向现象。Zhao 等[10]利用牛顿定律推导出梁的弹性运动和桨毂转动的控制方程,分析了旋转欧拉-伯努利梁的稳态振动,讨论了转轴转动惯量与半径对旋转梁频率与振型的影响。刚柔耦合模型能够分析柔性梁在特定转动规律下的动力学特性,但实际中的转轴并不能够完全等效为刚体。为了更加精确地分析叶片-桨毂-转轴系统动力学特性,需要考虑转轴的弹性振动。

一些学者考虑了转轴的弹性变形,分析了叶片-转轴耦合系统动力学特性。贺天鹏等[11]针对共轴直升机旋翼系统进行了多体动力学分析,模型中包含了柔性旋翼与柔性轴,利用多体动力学软件 ADAMS 进行了仿真计算并进行了实验验证。结果表明,考虑了旋翼与轴柔性的计算结果与实验数据吻合良好。徐自力等[12]利用对多级叶盘-轴耦合结构的振动特性进行了计算分析,发现考虑轴弹性扭转变形作用后,系统模态中增加了新的耦合模态,耦合模态振动特征与单纯叶片振动特征存在明显区别。朱由锋等[13]基于有限差分法建立了水平旋转梁的动力学模型,分析了不同转速下的弹性梁固有频率变化规律,但未考虑系统旋转带来的科氏效应。李朝峰等[14]建立了包含多个弹性叶片-轮盘-转轴耦合系统,发现了叶片数、转盘位置对耦合系统固有频率均存在明显影响,但并未深入分析科氏效应对系统动力学特性的影响。

对于旋转叶片,科氏效应对其振动特性具有显著影响,尤其当叶片柔性较大时,叶片变形非线性程度增加。为了更为精确地分析科氏效应对叶片-桨毂-轴耦合系统动力学特性的影响,需准确描述叶片变形。本研究利用几何精确梁模型并结合阶次截断方法,考虑了叶片拉伸、弯曲及扭转的三维空间运动,建立了考虑科氏效应与离心刚化作用的高精度叶片-桨毂-轴耦合动力学模型,并通过数值模拟研究了不同半径比、刚度比、叶片数目下科氏效应对耦合系统振动特性的影响规律。

1 叶片-桨毂-轴耦合动力学模型

叶片-桨毂-轴耦合系统包含柔性叶片、刚性桨毂以及可发生弹性扭转变形的转轴。如图 1 所示,OX_0Y_0Z 为惯性参考系,坐标轴指向遵循右手定则,O 在系统转轴中心线上,Z 轴垂直指向面外。整个系统以角速度 ω 绕 Z 轴旋转。定义桨毂随体旋转

坐标系为 OX_1Y_1Z，X_1 与 X_0 夹角为 ωt，t 为转动时间。轴的弹性扭转变形使得桨毂在基础的旋转角度上附加了一个扭转角 φ。叶片随体坐标系 OX_2Y_2Z，X_2 与叶片未变形时的中心线重合，R 为桨毂半径。

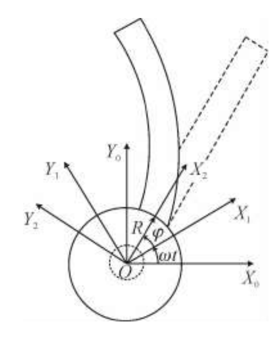


图 1 叶片-桨毂-轴结构坐标系统描述

Fig. 1 Description of coordinate systems of blade-hub-shaft structure

图 2 所示为叶片随体坐标系中变形示意图。图中 $O_e\eta\zeta\xi$ 为固定在叶片截面上的坐标系；坐标原点 O_e 位于截面中心；ξ 轴与叶片中心线重合，垂直于叶片弦向；η 轴平行于叶片弦向。叶片变形后，O_e 沿 ξ、η、ζ 方向的位移分别为 u、v、w。

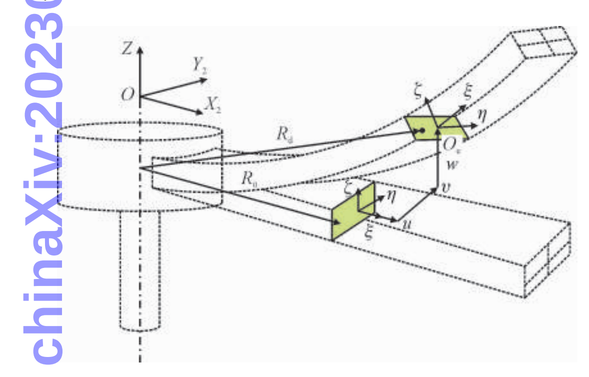


图 2 叶片变形示意图

Fig. 2 Blade deformation diagram

根据上述坐标描述，叶片未变形时任意位置处的质点可表示为

$$\boldsymbol{R}_0=[R+x\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}+[0\quad \eta\quad \zeta]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

式中 x 为桨毂至该质点在 X_2 轴上的投影距离。

叶片变形后任意位置处的质点可表示为

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}}=[R+x+u\quad v\quad w]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\cdot[0\quad \eta\quad \zeta]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为欧拉变换矩阵。为了简化计算，对矩阵中各元素进行阶次截断，保留至二阶，得到简化后的欧拉变换矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & v' & w'\\ -\theta w'-v' & 1-\theta w'v' & \theta\\ -w'-\theta v' & -\theta-w'v' & 1\end{bmatrix} \tag{3}$$

式中：θ 为叶片截面转角；$*'$ 为 $*$ 对 x 求偏导。

由格林应变准则，根据变形前后的位置矢量可得到叶片应变张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j-\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j) \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{G}_i=\frac{\partial\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}}}{\partial\boldsymbol{y}_i},\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial\boldsymbol{G}_0}{\partial\boldsymbol{y}_i},\boldsymbol{y}=[x\quad \eta\quad \zeta]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

忽略二阶以上的高阶项，式(5)中应变张量可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{p}} \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix}1 & \eta^2+\zeta^2 & \zeta & -\eta\\ 0 & -\zeta & 0 & 0\\ 0 & \eta & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix}u'+\frac{1}{2}(v'+w')^2\\ (\theta'+w'v'')^2\\ v''\theta-w''\\ v''+w''\theta\end{bmatrix}$$

式中，下标 p 表示势能相关项。

式(6)变分可得

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\delta\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}} \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}=[\theta\quad u'\quad v'\quad w'\quad \theta'\quad v''\quad w'']^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & v'' & w''\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ v' & 0 & 0 & 0\\ w' & 2(\theta'+w'v'')v' & 0 & 0\\ 0 & 2(\theta'+w'v'') & 0 & 0\\ 0 & 2(\theta'+w'v'')w' & \theta & 1\\ 0 & 0 & -1 & \theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

式中：$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$ 为叶片应变广义坐标向量；$\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}$ 为应变变分转换矩阵。

叶片弹性势能变分由叶片应变及其变分项表示为

$$\delta U_{\mathrm{b}}=\iiint_{\mathrm{b}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V+\int_0^{L\mathrm{b}}\int_x^{L\mathrm{b}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}\rho_{\mathrm{b}}S\omega^2\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \tag{8}$$

式中：脚标 b 表示叶片相关项；第一积分项表示由叶片变形产生的应变势能；第二积分项为叶片旋转时离心力造成的叶片拉伸变形势能；$\boldsymbol{E}$ 为叶片的弹性模量矩阵；V 为叶片积分微元体积；ρ_{b} 为叶片密度；S 为叶片截面面积；ω 为系统转速；L_{b} 为叶片长度。

将式(6)和式(7)代入式(8)中，整理可得

$$\delta U_{\mathrm{b}} = \int_0^{Lb} \delta \boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{V}_{\mathrm{p}} \mathrm{d}x + \int_0^{Lb} \delta \boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_{\mathrm{s}} \int_x^{Lb} \rho S \omega^2 \xi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{S}_1 = \iint_S \boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{C}_{\mathrm{p}} \mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{s}} = [0 \quad 1+u' \quad v' \quad w' \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

根据 D'Alembert 原理，叶片动能变分表达式为

$$\delta T_{\mathrm{b}} = -\iiint \delta \boldsymbol{R}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{T}} \rho_{\mathrm{b}} \ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{g}} \mathrm{d}V \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{R}_{\mathrm{g}}$ 为惯性坐标系 OX_0Y_0Z 中的质点位置矢量；$\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{g}}$ 为位置矢量对时间的二阶导数。

叶片随体坐标系 OX_2Y_2Z 中的位置矢量$\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}}$ 与惯性系中的位置矢量$\boldsymbol{R}_{\mathrm{g}}$ 之间满足如下关系。

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{o}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{A}_{\mathrm{o}}$ 为惯性系与非惯性系之间的矢量旋转矩阵。

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t+\varphi) & \sin(\omega t+\varphi) & 0 \\ -\sin(\omega t+\varphi) & \cos(\omega t+\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

矢量旋转矩阵中，包含了系统旋转参数 ωt 以及桨毂扭转角 φ 两部分。

对式(11)取变分，位置矢量变分 $\delta\boldsymbol{R}_{\mathrm{g}}$ 可表示为

$$\delta\boldsymbol{R}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{k}}\delta\boldsymbol{Q}_{\mathrm{k}} + \tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}}\delta\varphi \tag{13}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} -\sin(\omega t+\varphi) & \cos(\omega t+\varphi) & 0 \\ -\cos(\omega t+\varphi) & -\sin(\omega t+\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{k}} = [\boldsymbol{I}_{3\times3} \quad \eta\times\boldsymbol{I}_{3\times3} \quad \zeta\times\boldsymbol{I}_{3\times3}],$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} r_{\mathrm{h}}+x+u \\ v \\ w \\ -v'-\theta w' \\ 1 \\ \theta \\ \theta v'-w' \\ -\theta \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{k}} = [u \quad v \quad w \quad \theta \quad v' \quad w']^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w' & -1 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & v'w' & -\theta w' & -\theta v' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v' & \theta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -w' & -v' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{k}}$ 为叶片动能广义坐标向量；$\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}}$ 为运动参数向量；$\boldsymbol{H}_{\mathrm{k}}$ 为运动变分转换矩阵。

式(10)中的 $\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{g}}$ 可由式(11)左右两端对时间求二阶导数得到

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{o}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{k}} (\ddot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{k}} + 2\boldsymbol{\Omega} \dot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{k}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{V}_{\mathrm{k}}) \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} -\omega^2 & \ddot{\varphi} & 0 \\ -\ddot{\varphi} & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将式(13)和式(14)代入式(10)，则叶片动能变分 δT_{b} 写为

$$\delta T_{\mathrm{b}} = -\int_0^{Lb} \delta \boldsymbol{Q}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_2 (\ddot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{k}} + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{k}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}}) \mathrm{d}x - \int_0^{Lb} \delta\varphi \boldsymbol{V}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_3 (\ddot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{k}} + 2\Omega\dot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{k}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}}) \mathrm{d}x \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{S}_2 = \rho_{\mathrm{b}} \iint_S \boldsymbol{C}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{k}} \mathrm{d}s, \boldsymbol{S}_3 = \rho_{\mathrm{b}} \iint_S \boldsymbol{C}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{o}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{k}} \mathrm{d}s$$

式(15)中，$2\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{k}}$ 项即为科氏效应项。

类似于式(10)，桨毂动能变分 δT_{h} 可表示为

$$\delta T_{\mathrm{h}} = -\delta\varphi I_{\mathrm{h}} \ddot{\varphi} \tag{16}$$

式中 I_{h} 为桨毂的转动惯量。

同样可求得转轴的动能变分 δT_{s} 为

$$\delta T_{\mathrm{s}} = -\int_0^{Ls} \delta\psi \rho_{\mathrm{s}} J_{\mathrm{s}} \ddot{\psi} \mathrm{d}z \tag{17}$$

式中：$\psi(z,t)$ 为轴在 Z 方向上的扭转角分布函数；ρ_{s} 为轴密度；J_{s} 为轴截面极惯性矩；L_{s} 为轴长度。

轴扭转变形的弹性势能变分 δU_{s} 为

$$\delta U_{\mathrm{s}} = \int_0^{Ls} \delta\psi G J_{\mathrm{s}} \psi' \mathrm{d}z \tag{18}$$

式中 G 为转轴的切变模量。

至此已推导出叶片-桨毂-轴耦合系统各部分的动能及势能表达式。根据 Hamilton 原理，叶片-桨

毂-轴耦合系统的运动满足如下关系。

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta U_b + \delta U_s - \delta T_h - \delta T_s - \delta T_b)\mathrm{d}t = 0 \quad (19)$$

式中：t_1 和 t_2 为任意时刻。

采用 Rayleigh-Ritz 法对运动变量进行解耦，得

$$\begin{cases} u(x,t) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{q}_u(t), \boldsymbol{v}(x,t) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{q}_v(t) \\ w(x,t) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{q}_w(t), \theta(x,t) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{q}_\theta(t) \\ \psi(z,t) = \boldsymbol{\Phi}(z)\boldsymbol{\xi}(t), \varphi(t) = \boldsymbol{\Phi}(L_s)\boldsymbol{\xi}(t) \end{cases} \quad (20)$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 为已知的形函数向量，可根据计算精度与效率的需求设置不同阶数；$\boldsymbol{q}_*(t)$ 为对应各个叶片运动变量的广义坐标向量；$\boldsymbol{\xi}(t)$ 为对应轴扭转运动的广义坐标向量。需要指出的是，桨毂的扭转角度 φ 满足 $\varphi(t) = \psi(L_s, t)$。

整体广义坐标向量 $\boldsymbol{Q}$ 可写作

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_u^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_w^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{q}_\theta^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \quad (21)$$

结合式(20)与式(21)，各广义坐标向量可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}_p = \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{N}_2\boldsymbol{Q} \\ \psi = \boldsymbol{N}_3\boldsymbol{Q}, \varphi = \boldsymbol{N}_4\boldsymbol{Q} \end{cases} \quad (22)$$

式中：$\boldsymbol{N}_1 \sim \boldsymbol{N}_4$ 矩阵为对应各个运动坐标向量的形函数矩阵。

将式(22)各项代入式(19)可得

$$\delta\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{F}_p - \boldsymbol{F}_h + \boldsymbol{F}_s - \boldsymbol{F}_k) = 0 \quad (23)$$

式中

$$\boldsymbol{F}_p = \int_0^{Lb} \boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_p^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{V}_p \mathrm{d}x + \int_0^{Lb} \boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_s \int_x^{Lb} \rho_b S \omega^2 \xi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x,$$

$$\boldsymbol{F}_h = -\boldsymbol{N}_4 I_h \ddot{\varphi},$$

$$\boldsymbol{F}_s = \int_0^{Ls} \boldsymbol{N}_3 G J_s \psi' \mathrm{d}z + \int_0^{Ls} \boldsymbol{N}_3 \rho_s J_s \ddot{\psi} \mathrm{d}z,$$

$$\boldsymbol{F}_k = -\int_0^{Lb} \boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_2 (\dot{\boldsymbol{V}}_k + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{V}}_k + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{V}_k)\mathrm{d}x - \int_0^{Lb} \boldsymbol{N}_4^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_3 (\ddot{\boldsymbol{V}}_k + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{V}}_k + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{V}_k)\mathrm{d}x$$

式(23)对于任意 $\delta\boldsymbol{Q}$ 均成立，可得系统隐式运动微分方程，即

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{F}_p - \boldsymbol{F}_h + \boldsymbol{F}_s - \boldsymbol{F}_k \equiv \boldsymbol{0} \quad (24)$$

系统质量矩阵 $\boldsymbol{M}$、刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和科氏效应矩阵 $\boldsymbol{G}$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{M} = \frac{\partial\boldsymbol{\Pi}}{\partial\ddot{\boldsymbol{Q}}}, \boldsymbol{K} = \frac{\partial\boldsymbol{\Pi}}{\partial\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{G} = \frac{\partial\boldsymbol{\Pi}}{\partial\dot{\boldsymbol{Q}}} \quad (25)$$

系统振动微分方程可写作

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0} \quad (26)$$

需要注意的是，在能量泛函 $\boldsymbol{F}_p$ 的第二项中考虑了离心力引起的形变势能，因此，利用总体能量泛函求得的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中已包含了离心刚化作用。

对于式(26)的复特征值问题，采用状态空间方法对系统进行求解引入状态空间变量

$$\boldsymbol{X} = [\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}]^{\mathrm{T}} \quad (27)$$

根据式(27)将式(26)改写为

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{X}} + \tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \quad (28)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix}$$

则式(28)的特征值问题转化为

$$|\lambda\tilde{\boldsymbol{M}} + \tilde{\boldsymbol{K}}| = 0 \quad (29)$$

由式(29)即可求得叶片-桨毂-轴系统特征频率与模态振型。

2 算例分析

2.1 模型验证

叶片-桨毂-轴耦合系统的几何物理参数如表 1 所示。

表 1 叶片-桨毂-轴耦合模型参数

Tab. 1 Parameters of blade-hub-shaft coupling model

参数名称	参数值
叶片截面积 S/m^2	2.5×10^{-5}
叶片密度 $\rho_b/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3})$	2 700
转轴密度 $\rho_s/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3})$	2 700
转轴长度 L_s/m	0.3
叶片长度 L_b/m	1
叶片弹性模量 E/Pa	7.1×10^{10}
转轴切变模量 G/Pa	2.67×10^{10}

为使分析更具一般性，取如下形式的量纲为一的参数进行讨论。

$$\sigma = \frac{R}{L_b}, \kappa = \omega\sqrt{\frac{\rho_b S L_b^4}{E I_b}}, \gamma = \lambda\sqrt{\frac{\rho_b S L_b^4}{E I_b}}, \mu = \sqrt{\frac{G J_s L_b}{E I_b L_s}}$$

式中：σ 为桨毂与叶片半径之比；κ 为系统量纲归一化转速；γ 为系统量纲归一化频率；μ 为叶片弯曲-轴扭转刚度比；I_b 为叶片截面惯性矩。

上述量纲归一化参数给定后，桨毂半径 R、桨毂的转动惯量 I_h、轴的截面极惯性矩 J_s 均可求得。

首先,对本研究算法的准确性进行验证。综合考虑计算效率与精度,本研究使用的形函数阶数为15,计算时消去科氏效应矩阵 $\boldsymbol{G}$ 以忽略科氏效应。表2给出了利用本研究提出的数值模型计算的 $\sigma=0,\mu=\infty$ 时,均质旋转叶片的前2阶量纲归一化频率 γ 与已有文献计算结果[10]的对比情况。表3给出了考虑科氏效应不同转速和半径比下叶片基础频率与文献结果[9]对比结果。可以看出,本研究数值计算结果与现有文献数据吻合良好,具有较高的计算精度。

表2 不考虑科氏效应时,均匀叶片在不同转速下的前2阶频率($\sigma=0,\mu=\infty$)

Tab.2 First 2 step frequencies of a uniform blade under various rotating speeds without Coriolis effect($\sigma=0,\mu=\infty$)

κ	γ_1		γ_2	
	文献[10]	本研究	文献[10]	本研究
0	3.516 0	3.516 0	22.035	22.036
1	3.543 4	3.543 4	22.159	22.161
5	4.077 8	4.077 9	24.948	24.950
10	5.059 6	5.059 8	32.113	32.120

表3 考虑科氏效应时,不同转速和半径比下的叶片基础频率($\mu=\infty$)

Tab.3 Fundamental frequency of a uniform blade under various rotating speeds and radius ratios with Coriolis effect($\mu=\infty$)

σ	κ	文献[9]	本研究	偏差/%
1	2	5.049 5	5.051 0	0.029 7
	10	13.349 7	13.356 7	0.052 4
	50	41.241 1	41.274 5	0.081 0
5	2	7.097 4	7.094 1	-0.046 5
	10	27.467 0	27.506 7	0.144 5
	50	73.473 6	73.563 0	0.121 7

图3给出了量纲归一化转速 κ 由0增加至100时,量纲归一化频率 γ 的变化规律。可以看出,在转速较小时,两种曲线并未出现明显差异,科氏效应并不显著;当转速增加后,科氏效应加剧,两种曲线发生分离。在图中标注了前4阶模态频率曲线分别记为C-1、F-1、C-2、F-2。可以看出,科氏效应对C-1与C-2模态频率曲线影响较为显著,而对F-1、F-2模态频率曲线影响较为微弱。

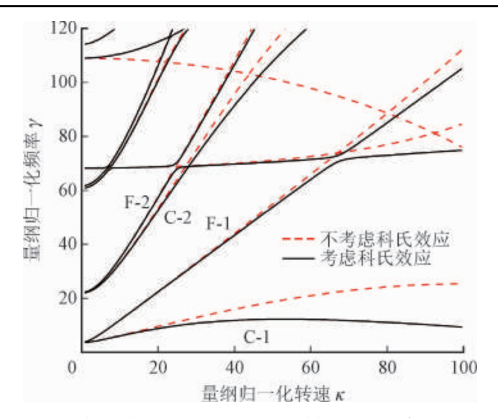


图3 科氏效应对叶片-桨毂-轴系统频率的影响

Fig.3 Influence of Coriolis effect on natural frequencies of the blade-hub-shaft system

图4中给出了上述4阶叶片-桨毂-轴耦合模态振型。可以看出,C-1模态为叶片1阶弯曲与轴的扭转耦合模态;F-1模态为单纯叶片弯曲振动,未与轴的扭转振动发生耦合;C-2模态为叶片的2阶弯曲与轴的扭转耦合模态,且与C-1模态振型相比,叶片的弯曲方向相反;F-2模态为单纯叶片2阶弯曲模态,未与轴扭转发生耦合。

C-1与C-2模态均为叶片弦向弯曲与轴扭转耦合模态。从科氏效应产生的根源上分析,叶片截面3个正交方向的运动变量中,轴向位移 u 和弦向位移 v 与旋转角速度方向正交,会产生科氏力;而叶片挥舞方向位移 w 与旋转角速度重合,不会产生科氏力。因此C-1、C-2耦合模态受到的科氏效应影响最为显著。

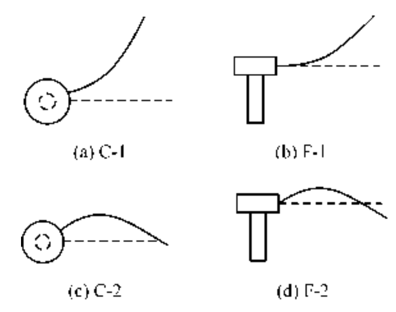


图4 耦合系统前4阶模态振型图($\kappa=0$)

Fig.4 First 4 modal shapes of coupling system($\kappa=0$)

上述数值结果说明,在较高转速下,叶片的面内弯曲振动必须考虑科氏效应的影响。

文中采用频率相对偏差 E_f 参数表征科氏效应的强弱。

$$E_f=\frac{\gamma_i-\tilde{\gamma}_i}{\tilde{\gamma}_i}\times 100\% \tag{30}$$

式中:γ_i 为第 i 阶考虑科氏效应的模态频率;$\tilde{\gamma}_i$ 为第 i 阶不考虑科氏效应的模态频率。

2.2 E_f 随半径比的变化规律

图 5 给出不同半径比情况下，前 2 阶耦合模态中叶片量纲归一化振型的变化趋势。图中横轴表示叶片轴向位置，纵轴为 v 方向上的模态振型分量。由图 5 可以看出：半径比由 0 增加至 0.5 时，C-1 阶模态振型的变形程度依次降低；随着半径比增加，C-2 阶模态叶片模态振型的变形程度依次升高。

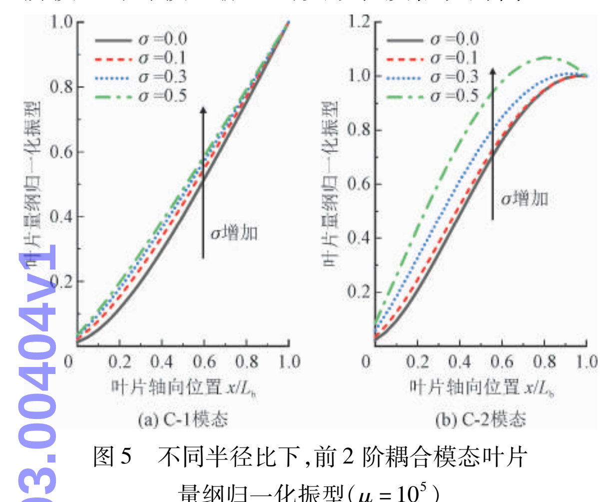


图 5 不同半径比下，前 2 阶耦合模态叶片量纲归一化振型（$\mu=10^5$）

Fig. 5 Normalized first 2 coupling mode shapes of blade with various radius ratios ($\mu=10^5$)

图 6 给出了半径比在 0～0.5 范围变化时的前 2 阶耦合模态频率相对偏差。

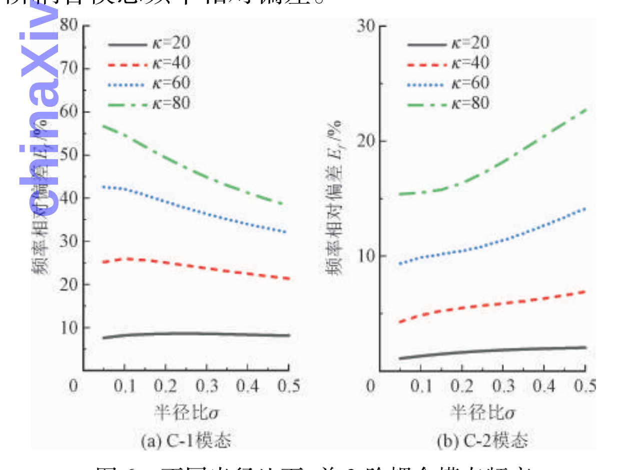


图 6 不同半径比下，前 2 阶耦合模态频率的相对偏差（$\mu=10^5$）

Fig. 6 Relative error of first 2 coupling mode frequencies with various radius ratios ($\mu=10^5$)

由图 6(a)可以看出：当 $\kappa=20$ 时，C-1 模态频率相对偏差 E_f 始终保持在 10% 以下；当 $\kappa=40$ 时，E_f 随着半径比增加逐渐降低，这种趋势在 $\kappa=60$ 和 $\kappa=80$情况下更为明显。由图 6(b)可以看出，C-2 模态频率显示出与 C-1 模态相反的规律；不同的转速下，C-2 模态频率相对偏差随着半径比的增加均有一定程度的上升，在高转速下的上升幅度更大。产生上述现象的原因为，科氏效应强度与叶片 v 方向变形程度相关。结合图 5 的叶片变形情况，半径比增加后，C-1 模态中的叶片 v 方向的变形程度减弱，科氏效应随之降低；而 C-2 模态中的叶片 v 方向的变形程度随半径比增加逐渐增大，科氏效应随之提高；转速提高后，科氏效应整体增强，相对偏差进一步增大。

上述数值分析结果表明，科氏效应对不同模态的影响规律存在差异，在工程分析过程中需单独考虑各阶模态下的频率变化规律。

2.3 E_f 随刚度比的变化规律

图 7 给出了不同刚度比情况下，前 2 阶模态中叶片量纲归一化振型的变化趋势。由图 7(a)可以看出：刚度比由 10^1增加至 10^7时，C-1 模态叶片振型的变形程度依次增大，其中：刚度比由 10^3增加至 10^5时，叶片模态振型变化较为明显；而刚度比由 10^5增加至 10^7时，叶片模态振型变化很小。由图 7(b)可以看出，刚度比为 10^1～10^3时的 C-2 模态叶片振型曲线接近为叶片的 1 阶弯曲，刚度比为 10^5～10^7时的叶片振型曲线接近叶片的 2 阶弯曲。这说明在上述两个范围之间存在一个叶片模态转换现象，模态转换前后 C-2 模态叶片振动形式发生明显变化。

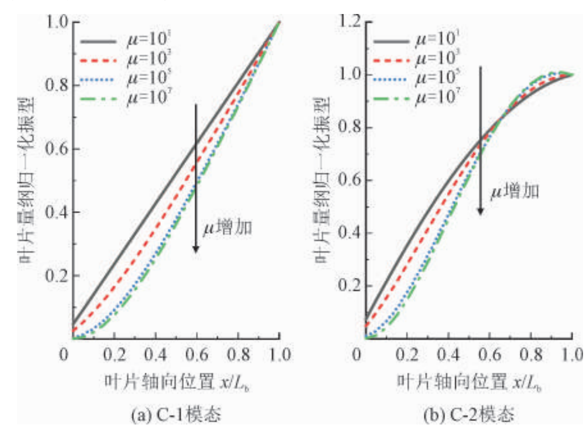


图 7 不同刚度比下，前 2 阶耦合模态叶片量纲归一化振型（$\sigma=0.1$）

Fig. 7 Normalized first 2 coupling mode shapes of blade with various stiffness ratios ($\sigma=0.1$)

图 8 给出了前 2 阶耦合模态频率相对偏差随刚度比的变化规律。由图 8(a)可以看出，C-1 模态频率相对偏差曲线呈先降低后增加的趋势。结合图 7 分析：当刚度比在 10^1～10^3范围内变化时，叶片变形

程度较低,科氏效应较弱,但由于此时 C-1 模态频率本身较低;因此相对偏差较大。随着刚度比的增加,C-1 模态频率迅速升高,而科氏效应并未明显增强,因此相对偏差逐渐降低。刚度比在 10^3 ~ 10^5 范围内变化时,叶片变形程度逐渐增大,科氏效应随之增强,因此相对偏差逐渐升高。刚度比在 10^5 ~ 10^7 范围内时,叶片变形程度基本不变,C-1 模态频率也基本保持不变,因此相对偏差维持在一个定值。此时,由于轴刚度较大,基本不发生扭转振动,故半径比的变化对相对偏差影响不大。从图 8(b)可以看出,刚度比在 10^3 ~ 10^5 区域内相对偏差出现明显的上升。由前文分析可知,该区域内发生了叶片模态转换,模态转换前叶片变形相对较小,科氏效应相对较弱,相对偏差较低;发生模态转换后,叶片变形增大,科氏效应增强,相对偏差增大。

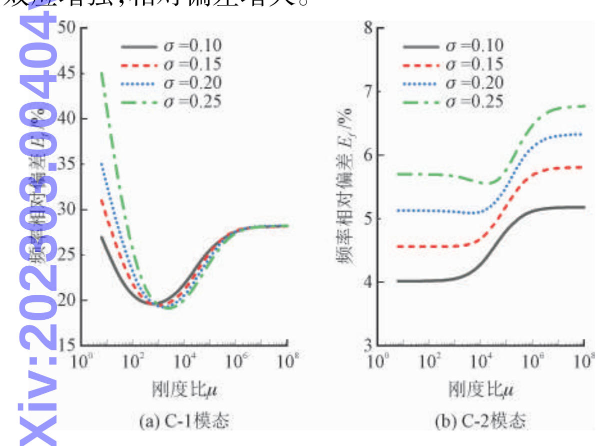


图 8　不同刚度比下前 2 阶耦合模态频率相对偏差($\kappa=40$)

Fig. 8　Relative error of first 2 coupling mode frequencies with various stiffness ratio ($\kappa=40$)

结果表明,过大和过小的转轴刚度均会引起明显的科氏效应。由于科氏效应会降低系统频率,引起失稳,因此需要在系统设计时将转轴与叶片的刚度比控制在10^4 附近。

2.4　E_f 随叶片数的变化规律

图 9 给出了叶片数目 N_b为 1 ~5 时的前 2 阶耦合模态叶片量纲归一化振型。由图 9 可以看出,随着叶片数目增加,C-1 模态叶片量纲归一化振型的变形程度逐渐减弱,C-2 模态的叶片变形程度也逐渐减弱,但变化幅度较小。

图 10 给出了 N_b为 1 ~5 情况下前 2 阶耦合模态频率相对偏差的变化曲线。由图 10 可以看出:随着叶片数目增加,前 2 阶耦合模态频率相对偏差逐渐降低;随着半径比由 0.10 增加至 0.25,C-1 模态相对偏差变化曲线依次降低,而 C-2 模态相对偏差降低趋势趋于平缓。

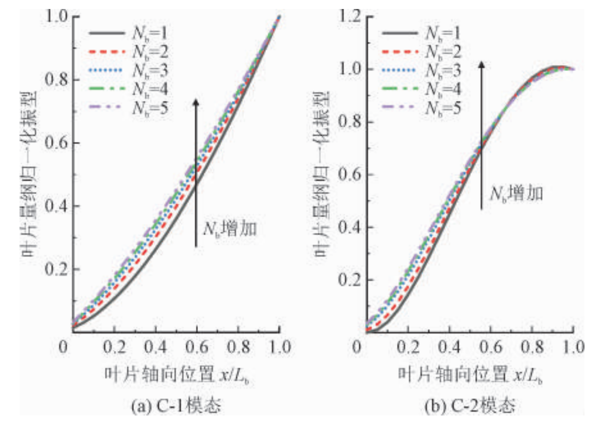


图 9　不同叶片数下前 2 阶耦合模态叶片量纲归一化振型($\sigma=0.1,\mu=10^5$)

Fig. 9　Normalized first 2 coupling mode shapes of blade with various blade numbers ($\sigma=0.1,\mu=10^5$)

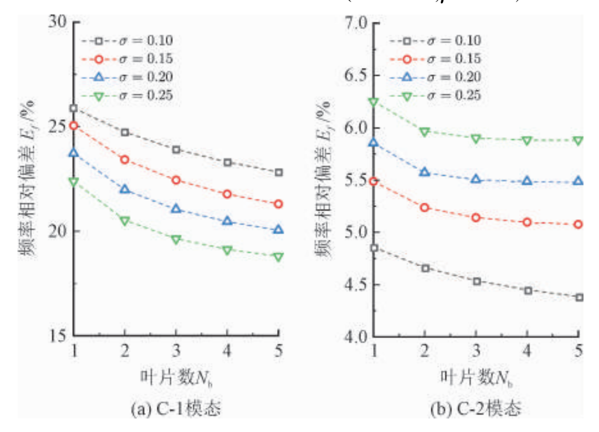


图 10　不同叶片数下前 2 阶耦合模态频率相对偏差($\mu=10^5$)

Fig. 10　Relative error of first 2 coupling mode frequencies with various blade numbers ($\mu=10^5$)

从叶片模态振型的变化角度分析,随着叶片数目增加,C-1 与 C-2 模态的振型弯曲程度均有所降低,科氏效应因此减弱,相对偏差逐渐减小;同时,由于半径比的增加降低了 C-1 模态叶片量纲归一化振型的变形程度,在半径比较大时,随着叶片数目增加,频率相对偏差进一步降低。与之相反,半径比增加,C-2 模态叶片量纲归一化振型变形程度增大,与叶片数目对振型的影响相互抵消,因此,在半径比较大时,C-2 模态频率相对偏差基本不受叶片数目影响。上述结果表明,多叶片-桨毂-轴耦合系统受科氏效应的影响相对较少,具有更为良好的稳定性。

3　结　论

本研究利用几何精确方法结合阶次截断描述叶

片非线性变形，引入了科氏效应的影响，建立了叶片-桨毂-轴耦合系统动力学模型，根据 Hamilton 原理推导出了系统振动微分方程。分析了科氏效应对耦合模态的作用机理。讨论了不同叶片-轴刚度比、叶片-桨毂半径比、叶片数目下科氏效应对系统动力学特性的影响，并从叶片量纲归一化振型的角度进行了机理分析。

叶片-桨毂-轴系统模态包含叶片弯曲-轴扭转耦合模态以及叶片弯曲非耦合模态。科氏效应对耦合模态存在明显影响。随着半径比的增加，科氏效应对 C-1 模态频率的影响逐渐降低，而对 C-2 模态频率的影响逐渐升高；刚度比在 $10^3 \sim 10^5$ 时，发生了叶片模态转换现象，模态转换后，科氏效应的影响显著增强；叶片数目增加后，叶片模态振型变形程度减小，科氏效应的影响减弱。

参考文献

[1] LIU J Y, LU H. Rigid-flexible coupling dynamics of three-dimensional hub-beams system[J]. Multibody system dynamics, 2007, 18(4):487-510.

[2] CAI G P, HONG J Z, YANGS X. Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass[J]. Mechanics research communications, 2005, 32(2):173-190.

[3] 杨辉，洪嘉振，余征跃. 刚柔耦合建模理论的实验验证[J]. 力学学报，2003，35(2):127-130.
YANG Hui, HONG Jiazhen, YU Zhengyue. Experimental validation on modeling theory for rigid-flexible coupling system[J]. Acta mechanica Sinica, 2003, 35(2):127-130(in Chinese).

[4] 吴胜宝，章定国. 大范围运动刚体-柔性梁刚柔耦合动力学分析[J]. 振动工程学报，2011，24(1):1-7.
WU Shengbao, ZHANG Dingguo. Rigid-flexible coupling dynamic analysis of hub-flexible beam with large overall motion[J]. Journal of vibration engineering, 2011, 24(1):1-7(in Chinese).

[5] 郭小炜，刘占芳，郝志明. 弹性体作定轴转动的耦合动力学模型与数值分析[J]. 振动工程学报，2016，29(1):50-60.
GUO Xiaowei, LIU Zhanfang, HAO Zhiming. Dynamic modeling and numerical analysis of elastic body with couple stress under fixed-axis rotation with variable rotational speed[J]. Journal of vibration engineering, 2016, 29(1):50-60(in Chinese).

[6] 盛国刚，李传习，赵冰. 支承运动情况下旋转梁的刚-柔耦合振动分析[J]. 振动与冲击，2006，25(6):117-120.
SHENG Guogang, LI Chuanxi, ZHAO Bing. Rigid-flexible coupling vibration of a rotating beam subjected to base excitation[J]. Journal of vibration and shock, 2006, 25(6):117-120(in Chinese).

[7] AN S Q, ZOU H L, DENGZ C, et al. Dynamic analysis on hub - beam system with transient stiffness variation[J]. International journal of mechanical sciences, 2019, 151:692-702.

[8] LI L, ZHU W D, ZHANG D G, et al. A new dynamic model of a planar rotating hub-beam system based on a description using the slope angle and stretch strain of the beam[J]. Journal of sound and vibration, 2015, 345:214-232.

[9] LI L, ZHANG D G, ZHU W D. Free vibration analysis of a rotating hub-functionally graded material beam system with the dynamic stiffening effect[J]. Journal of sound & vibration, 2014, 333(5):1526-1541.

[10] ZHAO Z, LIU C, MA W. Characteristics of steady vibration in a rotating hub-beam system[J]. Journal of sound and vibration, 2016, 363:571-583.

[11] 贺天鹏，李书，张俊，等. 共轴式直升机双旋翼系统的多体动力学模型[J]. 振动，测试与诊断，2013，33(增刊1):91-96.
HE Tianpeng, LI Shu, ZHANG Jun, et al. Multibody dynamic model of dual rotors system in coaxial helicopter[J]. Journal of vibration, measurement & diagnosis, 2013, 33(S1):91-96(in Chinese).

[12] 徐自力，周子宣. 航空发动机多级叶盘-轴系统扭转耦合振动特性[J]. 交通运输工程学报，2019，19(3):79-88.
XU Zili, ZHOU Zixuan. Torsional coupled vibration characteristics of multi-stage blade disc-shaft system of aeroengine[J]. Journal of traffic and transportation engineering, 2019, 19(3):79-88(in Chinese).

[13] 朱由锋，任勇生. 基于有限差分法的水平旋转梁自由振动解析[J]. 振动与冲击，2012，31(14):43-46.
ZHU Youfeng, REN Yongsheng. Free vibration analysis of horizontal spinning beams by using finite difference method[J]. Journal of vibration and shock, 2012, 31(14):43-46(in Chinese).

[14] 李朝峰，刘文，佘厚鑫，等. 弹性叶片-轮盘-转轴系统的耦合振动特性[J]. 振动工程学报，2016，29(5):894-899.
LI Chaofeng, LIU Wen, SHE Houxin, et al. Vibration characteristics of an elastic blade-disk-shaft coupling system[J]. Journal of vibration engineering, 2016, 29(5):894-899(in Chinese).

（编辑　黄崇亚）